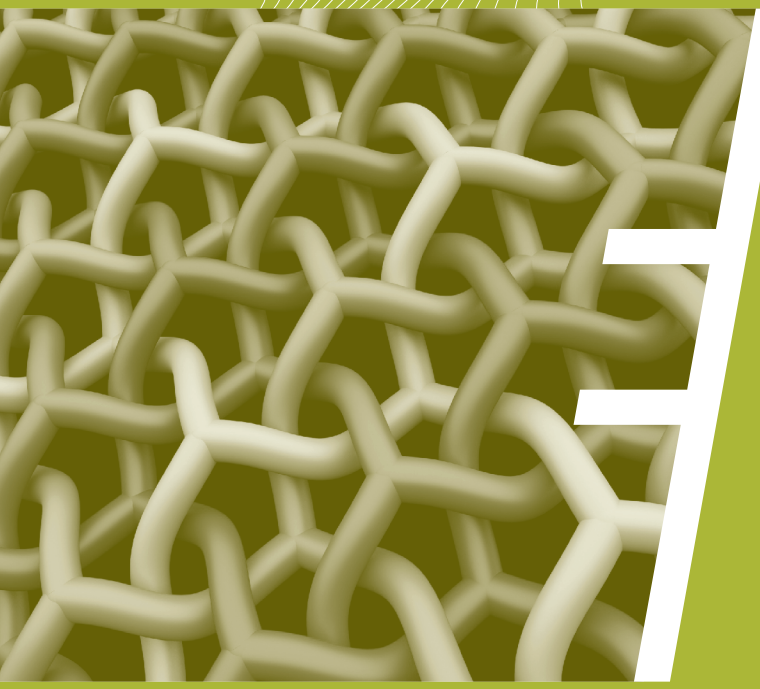
Deutsche Mathematiker-Vereinigung

DE G

# Mitteilungen der DMV

## In a Material World

Myfanwy E. Evans und Gerd E. Schröder-Turk



H 3

2014
22

Rommé mit Cantor und Co.
Jan-Philipp Litza

Warum Mathematik veröffentlichen?
Klaus Peters

# *In a Material World*

## Hyperbolische Geometrie in biologischen Materialien

Myfanwy E. Evans und Gerd E. Schröder-Turk

Wir leben in einer Welt, in der Materie und Materialien jeglicher Art – tot oder lebendig, synthetisch oder natürlich – eine große Rolle spielen. Der Erforschung von Materie widmet sich eine entsprechende Vielzahl akademischer Disziplinen, von den Materialwissenschaften und der Physik der kondensierten Materie bis hin zur synthetischen Chemie, der Strukturbiologie und der Mathematik. Weil Materie aus diversen Molekülen, die über verschiedene Kräfte und Wechselwirkungen interagieren, besteht und den Gesetzen der Physik gehorcht, ist es ein wenig verbreiteter Standpunkt, Fragen der Materie als geometrische Probleme aufzufassen. Oft zu Unrecht, wenn die Materialien eine räumlich komplexe Struktur aufweisen! Ein alltägliches Beispiel ist das Phänomen der Schrumpelfinger in der Badewanne – das Aufquellen und Austrocknen der äußeren Hautschichten wird, wie wir sehen werden, durch eine komplexe geometrische Struktur in den Hautzellen ermöglicht. Nicht weniger wichtig sind Prozesse in biologischen oder synthetischen Materialien, vom Flüssigkeitstransport durch die poröse Struktur in Knochen bis hin zu modernen optischen Bauteilen, deren Funktion auf der Ausnutzung spezifischer, oftmals netzwerkartiger Nanostrukturen basiert. In diesem Artikel nehmen wir die Struktur der menschlichen Haut als Ausgangspunkt für einen Diskurs über die Relevanz von hyperbolischer Geometrie – der Geometrie der sattelförmigen oder negativ gekrümmten Flächen – für Fragen der modernen Materialwissenschaften und der biologischen Materie.

### Die Geometrie von Schrumpelfingern

Das Aufquellen von Hautzellen bei ausgedehntem Kontakt mit Wasser ist nach einem längerem Bad an den Fingern deutlich zu erkennen. Die Hautzellen können dabei um ein Vielfaches ihrer ursprünglichen Größe anschwellen. Moderne Mikroskopiemethoden erlauben einen Einblick in den Aspekt der Hautstruktur, der für diese Fähigkeit der Haut verantwortlich ist: Ein hochsymmetrisches hierarchisches und poröses Arrangement von Keratinfilament wird sichtbar, dessen Zwischenräume mit Wasser gefüllt sind [4, 22]. Wir argumentieren in diesem Artikel, dass die besondere Schwelleigenschaft der Haut – Vervielfachung des Volumens ohne Verlust der mechanischen Integrität – zu einem großen Teil mittels geometrischer Studien zu verstehen ist: erstens das Problem, Spiralen im Raum möglichst dicht zu packen, und zweitens das Dilemma, dass sich die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}^2$ (oder eine Sattelfläche konstanter Gaußkrümmung) nicht im Euklidischen Raum einbetten lässt.

Die Keratinstruktur der Haut besteht aus helixförmigen Fasern (auch *Filamente* genannt), die sich entlang bestimmter Achsen zu einer Struktur mit kubischer Symmetrie anordnen, wie in Abb. 1 gezeigt [4]. Diese kubische Helix-Packung ist dreifach-periodisch, d. h. invariant unter drei zueinander orthogonalen Translationen, und eng verwandt mit einer Packung unendlich langer Stäbe, die in der Strukturchemie wohlbekannt ist [24]. Diese Filamentstruktur entspricht einem Zopf, der nicht wie gewöhnlich in einer Richtung geflochten ist, sondern in den vier Richtungen, die den Raumdiagonalen der kubischen Symmetriegruppe entsprechen.

Wie sich diese Filamentstruktur beim Anschwellen geometrisch verändert, lässt sich mithilfe der Geometrie, der Thermodynamik räumlich begrenzter Flüssigkeiten und der Physik von Filamentfasern erklären [7]. Es ergibt sich ein Deformationspfad der Filamentstruktur, bei dem die mechanische Integrität der Struktur immer gewährleistet ist (vgl. Abb. 2).

Die Betrachtung der geometrischen Strukturen derartiger Biomaterialien (hier als *materials geometry* bezeichnet, in Anlehnung an das englische Wort *materials science* für

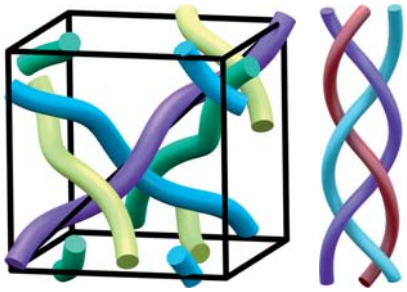


Abbildung 1. *Die Packung der Keratinfilamente in abgestorbenen Hautzellen ist eine periodische Struktur mit kubischer Symmetrie, die sich als Verallgemeinerung eines geflochtenen Zopfes ergibt.*

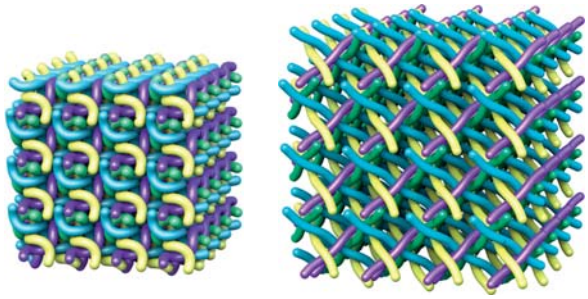


Abbildung 2. *Abbildung der symmetrischen Struktur der Keratinfilamente in abgestorbenen Hautzellen. Sowohl im dichten trockenen Zustand (links) als auch im stark geschwollenen Zustand (rechts) ist die Stabilität durch die verwobene Struktur gewährleistet* [7].


DOI 10.1515/dmvm-2014-0062

die Disziplin der Materialwissenschaften) stellt eine unkonventionelle Sichtweise dar. Die Perspektive der Materialgeometrie ist komplementär zum biochemischen Studium der Materialeigenschaften auf der molekularen Ebene und zu dermatologischen Studien. Die geometrische Sichtweise stellt hier eine wichtige Verknüpfung dieser Felder dar und erlaubt Einsichten in die Hierarchie der Ordnungsmechanismen in diesen komplexen Materialien.

Die Keratinstruktur der Haut ist ein Beispiel dafür, wie das Verständnis von räumlicher Geometrie Einsichten in die Bildung komplexer Strukturen in lebenden Zellen liefert. Sie zeigt die Beziehung auf zwischen diesem Typus biologischer Membranen und den sogenannten dreifach-periodischen Minimalflächen, insbesondere zu Alan Schoens *Gyroid*-Fläche [31].

## Der Gyroid: Eine dreifach-periodische Minimalfläche

Der Gyroid ist eine dreifach-periodische Minimalfläche, die den Raum in zwei netzwerk- oder labyrinthartige Domänen teilt und daher als ‚bikontinuierlich'[1] bezeichnet wird, siehe Abb. 4. Die beiden Domänen sind bis auf eine Punktspiegelung identisch. Der Gyroid wurde in den 60er Jahren von Alan Schoen erfunden [31] und ist seitdem mathematisch umfassend untersucht worden [9, 10]. Die komplexe Form symmetrischer bikontinuierlicher Minimalflächen lässt sich durch ein geometrisches Netzwerk aus Stäben und Knoten, das in den Labyrinthen zentriert liegt, veranschaulichen. Dieses Gyroid-Netzwerk, bekannt unter dem Namen **srs** [16, 23], besteht aus (bis auf Translation und Symmetrie) identischen, dreivalenten Ecken und identischen Kanten und ist eines der fundamentalen periodischen Netzwerke [3]. Schoen fand den Gyroid bei einer Untersuchung der Möglichkeiten, zwei identische Netzwerke auf symmetrische Weise ineinanderzulegen, als die Minimalfläche zwischen zwei ineinander verwobenen **srs**-Netzwerken [30]. Schoens Gyroidfläche ist eng verwandt mit zwei anderen bikontinuierlichen Flächen, der *Primitivfläche* und der *Diamantfläche* (Abb. 3), die Herrmann Amandus Schwarz im 19. Jahrhundert beschrieb [35].[2]

Zeitgleich zur geometrischen Beschreibung des Gyroids durch Alan Schoen identifizierte der Chemiker Vittorio Luzzati eine gyroidartige Struktur, die sich spontan in Lipid-Systemen auf der Skala von mehreren Nanometern bildet [20]. Dies stellte den Anfang eines beachtlichen wissenschaftlichen Siegeszugs des Gyroids dar, der mittlerweile in vielen Varianten in verschiedenen Systemen der sogenannten weichen Materie beobachtet wird [14]. Der Gyroid und ihm verwandte Strukturen sind wunderbare Beispiele dafür, wie durch gemeinsame Fortschritte in Geometrie und in den experimentellen Wissenschaften wichtige neue Konzepte entwickelt werden können.

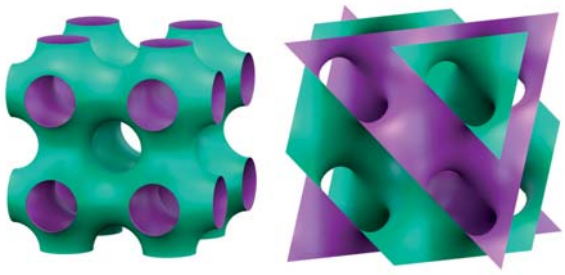


Abbildung 3. *Schwarz Primitiv- und Diamantflächen*

Es gibt eine bemerkenswerte, aber nur auf den ersten Blick verwunderliche Beziehung zwischen Schoens Gyroid und der Filamentstruktur der Haut. In einem geeignet orientierten Gyroid, besetzen die verwobenenen Keratinfilamente der Haut gerade eine der beiden Labyrinth-Domänen, wohingegen die zweite Domäne mit Wasser gefüllt ist [4, 6], siehe Abb. 4. Diese Beziehung zwischen Gyroid und Keratinstruktur ähnelt einem anderen Beispiel aus der biologischen Welt, nämlich der porösen Nanostruktur in den Flügelschuppen bestimmter grüner Schmetterlinge. In den Schuppen des grünen Zipfelfalters (Abb. 5) bildet sich eine gyroidartige Struktur, bei der eine Domäne durch das Biopolymer Chitin ausgefüllt wird

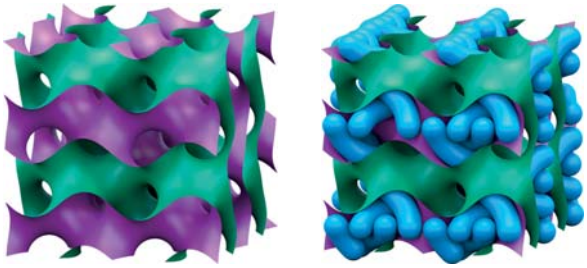


Abbildung 4. *(L) Die dreifach-periodische Gyroidfläche teilt den Raum in zwei identische labyrinthartige Domänen, hier in grün und violett dargestellt. (R) Die verwobenen Keratinfilamente der Hautzellen besetzen dabei lediglich eine der beiden Domänen.*

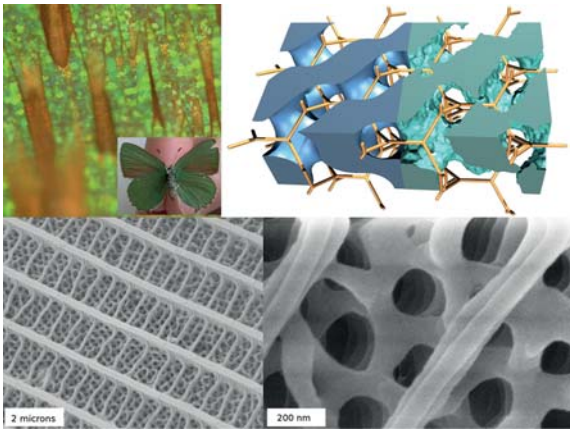



Abbildung 5. *Die Nanostruktur der Flügelschuppen des Grünen Zipfelfalters entspricht einer gyroidartigen Struktur mit einer hohlen und einer mit Chitin gefüllten Domäne [27, 34]. (Abb. re oben: Die linke Hälfte des zweigeteilten Bildes wurde berechnet, die rechte mikroskopiert.)*

und die andere hohl ist. In diesem und anderen Schmetterlingen agiert diese Nanostruktur als ein photonischer Kristall, wobei allein aufgrund der periodischen Struktur (d. h. ohne die Notwendigkeit eines Pigmentes) grünes Licht reflektiert wird und somit die brilliante grüne Farbe des Flügels erzeugt wird [21, 29, 34]. Insofern entspricht die Form der weichen Keratinfilamente in der menschlichen Haut der Geometrie des harten porösen Chitin-Materials der Schmetterlingflügel.

## Beste Lösung einer unmöglichen Aufgabe: Die Einbettung der hyperbolische Ebene in $\mathbb{E}^3$

Die Bildung von gyroidartigen Grenzflächen in Selbstorganisationsprozessen (*self-assembly*) ist eine klare Demonstration der Relevanz der hyperbolischen Geometrie für die Physik der weichen und biologischen Materie und für die Materialwissenschaften. Es entspricht einer pragmatischen Interpretation von David Hilberts berühmtem Theorem, dass eine Fläche mit konstanter negativer Gaußkrümmung im dreidimensionalen Raum $\mathbb{E}^3$ nicht existiert [11]. (Siehe Abb. 6 und 7 für eine Definition der Gaußkrümmung). Dieses Theorem besagt, dass das sattelförmige Äquivalent der Kugel – die das perfekte homogene konvexe Objekt mit konstanter Krümmung und konstantem Radius darstellt – im Raum der Materialwissenschaften nicht einbettbar ist.

Wie reagiert ein physikalisches System, das aus unbestimmten Gründen die Bildung sattelförmiger Grenzflächen mit konstanter Gaußkrümmung bevorzugt, auf die Unmöglichkeit $\mathbb{H}^2$ in $\mathbb{E}^3$ einzubetten? Da die perfekte Lösung (eine Sattelfläche mit konstanter negativer Gaußkrümmung) nicht verfügbar ist, sucht es die beste erreichbare Lösung, d. h. eine sattelförmige Fläche mit möglichst kleinen Variationen der Gaußkrümmung. Dieses in der Physik als *Frustration* bekannte Phänomen ist, wie im Folgenden am Beispiel der Selbstorganisation von Lipiden gezeigt wird, der wesentliche Grund dafür, warum Schoens Gyroidfläche in Selbstorganisationsprozessen der weichen Materie beinahe allgegenwärtig ist.

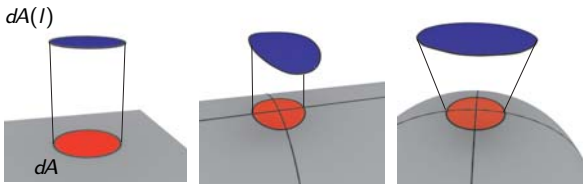



Abbildung 6. *Krümmung als die Änderung des Flächeninhalts unter Parallelflächentransformation: Verschiebt man alle Punkte eines Flächenstückes (mit Flächeninhalt dA) um eine Distanz l entlang ihrer Flächennormale, erhält man ein* paralleles *Flächenstück. Der Flächeninhalt ändert sich dabei als ein Polynom zweiten Grades* $dA(l) = dA(1 \pm Hl + Kl^2)$. *Die beiden Koeffizienten definieren die* mittlere Krümmung *H und die* Gaußkrümmung *K*.

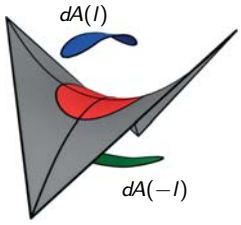



Abbildung 7. *Eine* Minimalfläche *ist eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung* $H = 0$. *Ihr Flächeninhalt ändert sich bei Paralleltransformation um* $+l$ *oder* $-l$ *um den gleichen Betrag.*

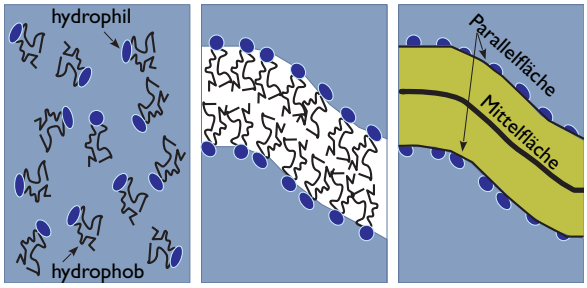



Abbildung 8. *Der Selbstorganisationsprozess von Lipiden in Wasser*

Lipide sind amphiphile[3] Moleküle, die aus zwei unterschiedlichen Teilen bestehen, nämlich einer wasserliebenden (hydrophilen) *Kopfgruppe* und einem wasserabweisenden (hydrophoben) *Schwanz*. Wenn derartige Moleküle in hinreichender Konzentration in Wasser gelöst werden, bilden sich bevorzugt Arrangements, bei denen die Schwänze durch eine Lage von Kopfgruppen vom Wasser getrennt werden. Eine derartige Struktur sind Lipid-Bilagen (auch *Membran* oder *Bilayer* genannt), d. h. eine gekrümmte Doppelschicht Lipide, bei denen die Schwänze das Innere der Schicht darstellen und die Kopfgruppen die Grenzflächen zum Wasser bilden. Die in der Doppelschicht zentrierte Fläche, im folgenden Mittel- oder Grenzfläche genannt, ermöglicht nun eine differentialgeometrische Herangehensweise.

Die Bildung sattelförmiger Grenzflächen bei der Selbstorganisation von Lipiden lässt sich als natürliche Konsequenz der ‚molekularen Form' interpretieren – als ein Packungsproblem weicher Teilchen mit einer typischen Form, unter Vernachlässigung aller chemischen Details [14, 17]. Die effektive Form des typischen Lipid-Moleküls wird charak-

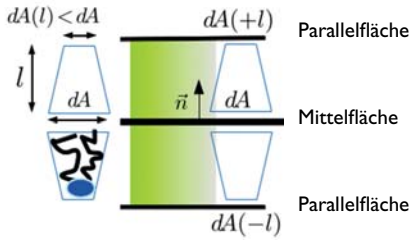



Abbildung 9. *Interpretation einer Lipidmembran mittels Parallelflächen und Beziehung zwischen molekularer Form und Grenzflächenkrümmung*

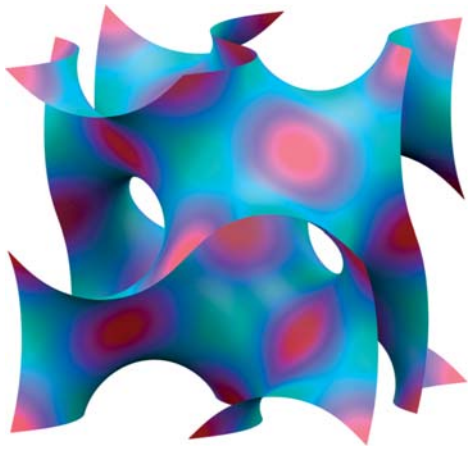


Abbildung 10. *Minimalflächen können nach Hilberts Theorem keine konstante Gaußkrümmung haben. Der Gyroid scheint die Minimalfläche mit den kleinsten Variationen der Gaußkrümmung zu sein. Die Farbkodierung entspricht der Gaußkrümmung.*

terisiert durch seine Länge $l$, die von den Schwänzen am Schwanzende im Mittel eingenommene Fläche sowie die Größe der Kopfgruppen. Eine Beziehung zwischen der molekularen Form und den Krümmungseigenschaften der angenommenen Mittelfläche erhält man nun durch Identifizierung der von den Schwänzen eingenommenen Fläche mit $dA$, der Kopfgruppengröße mit $dA(l)$ und der Schichtdicke mit $2l$. Damit die Bilage symmetrisch ist, muss die Mittelfläche eine Minimalfläche sein ($H = 0$, siehe Abb. 6 und 7). Falls nun, wie in Lipidsystemen möglich, die von den Kopfgruppen besetzte Fläche kleiner ist als die Mittelfläche, muss die Gaußkrümmung im Durchschnitt negativ sein. Eine negative Krümmung resultiert auch auf natürliche Weise aus der Tatsache, dass die die Membran begrenzenden Flächen im Vergleich zu der Mittelfäche der Membran komprimiert sein ‚wollen'. Stephen Hyde [12] hat dies mit dem selektiven Grillen einer Scheibe Toast illustriert. Grillt man eine Scheibe Brot nur von einer Seite, so zieht sich die gegrillte Oberfläche zusammen und induziert positive Krümmung. Grillt man anschließend die andere Seite, dann sind beide Oberflächen gegenüber der Mittelfläche komprimiert und es entsteht eine Sattelfläche.

Die subtilste Frage ist, warum sich in selbstorganisierten Lipidsystemen als Sattelflächen beinahe ausschließlich der Gyroid, die Primitivfläche und die Diamantfläche bilden. Warum werden die vielen anderen bekannten sattelförmigen Minimalflächengeometrien nicht beobachtet? Die Frustration, d. h. der Grad der Krümmungsvariationen, hält die Antwort parat. In Anbetracht der oben diskutierten Tatsache, dass die molekulare Form in Beziehung zu den Krümmungseigenschaften der angenommenen Grenzfläche steht, erwartet man, dass die Selbstorganisation von *identischen* Lipidmolekülen Grenzflächengeometrien mit *konstanten* Krümmungseigenschaften bevorzugt. Variationen der Gaußkrümmung (d. h. unterschiedliche Werte an unterschiedlichen Punkten der Fläche) entsprechen grob gesprochen Defekten in der Packung der Moleküle. Numerische Analysen [8, 13, 33] geben einen klaren Hinweis darauf, dass die oben genannten kubischen Minimalflächen unter allen möglichen Minimalflächen diejenigen sind, die die kleinsten Variationen der Gaußkrümmung aufweisen, d. h. diejenigen mit dem geringsten Grad an Frustration sind.[4 5]

Die optimale Konfiguration für eine Lipidmembran wäre also eine Einbettung der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$ in $\mathbb{E}^3$, d. h. eine Minimalfläche mit konstanter negativer Gaußkrümmung. Die Notwendigkeit im Raum $\mathbb{E}^3$ der Physik und Biologie zu existieren, zwingt die Membran dazu, eine der unvollkommenen aber dafür mit $\mathbb{E}^3$ verträglichen Geometrien (d. h. mit Variationen von $K$) anzunehmen. In dieser Hinsicht erscheint Schoens Gyroid als die beste, wenn auch nicht perfekte, Lösung der unmöglichen Aufgabe, $\mathbb{H}^2$ in $\mathbb{E}^3$ einzubetten.

Welche Belege gibt es dafür, dass die hier beschriebene Beziehung zur hyperbolischen Geometrie tatsächlich für die Bildung sattelförmiger Lipidmembranen relevant ist? Einen Beleg liefern diejenigen Lipid-Systeme, bei denen sich zwei verschiedene kubische Minimalflächen bilden, z. B. Diamant und Gyroid. In derartigen Systemen findet man zumeist Größenskalen (d. h. der bei Streuexperimenten beobachteten kristallografische Gitterkonstanten), bei denen die beiden Minimalflächen den gleichen durchschnittlichen Wert der Gaußkrümmung annehmen; der gleiche durchschnittliche Krümmungswert und die Entartung bzgl. der Krümmungsvariationen sind in Einklang mit der oben skizzierten konzeptionellen Verknüpfung von molekularer Form und Grenzflächenkrümmung [37]. Das Größenverhältnis wird dabei in der physikalischen Chemie als *Bonnet ratio* bezeichnet [37], als Hinweis auf die Bonnet-Transformation der Differentialgeometrie. Im Gegensatz zur Bonnet-Transformation, die krümmungsgleiche (isometrische) Varianten von Gyroid und Diamant vermittels selbst-überschneidender nichtkubischer Minimalflächenvarianten verbindet, muss die Transformation im chemischen System vermittels eines Transformationspfades von Minimalflächen ohne Selbstüberschneidungen sein. Der in Referenz [8, 33] vorgeschlagene Transformationsmechanismus scheint nun im Experiment bestätigt worden zu sein [36].

## Hyperbolische Materialgeometrie: Neue Designs für 3D-Morphologien

Angesichts der besonderen Rolle, die Gyroid-, Primitiv- und Diamantflächen als maximal verzerrungsfreie Einbettungen[6] von $\mathbb{H}^2$ in $\mathbb{E}^3$ für die kondensierte Materie spielen, stellt sich die Frage, ob diese Strukturen die Blaupause für weitere hierarchische strukturelle Komplexität darstellen, sowohl *in-vivo* als auch *in-vitro*. Ein interessanter Ansatz besteht nun darin, symmetrische Musterungen (Parkettierungen) der hyperbolischen Ebene zu erzeugen und diese dann auf auf die entsprechende Minimalfläche

Abbildung 11. *Die kubische Struktur des Minerals Sodalith entspricht einer Parkettierung von $\mathbb{H}^2$ durch identische Kacheln endlicher Größe.*

zu projizieren. Da die Minimalflächen maximal verzerrungsfreie Einbettungen darstellen, stellt diese Projektion auch eine möglichst verzerrungsarme Projektion des Musters von $\mathbb{H}^2$ dar. Dadurch erhält man eine dreifachperiodische Minimalfläche mit einer von $\mathbb{H}^2$ übernommenen Musterung. Die Ränder der Kacheln beschreiben Kurven auf der Minimalfäche. Die Gesamtheit dieser Pfade kann, wenn man die Minimalfläche selbst entfernt, als netzwerkartige Struktur interpretiert werden. Beachte, dass die Projektion auf periodische bikontinuierliche Minimalflächen auf natürliche Weise zu periodischen netzwerkartigen Strukturen führt, im Gegensatz zu Projektionen auf die Kugel $\mathbb{S}^2$, deren Ausdehnung immer durch die endliche Größe der Kugel gegeben ist, oder auf den Zylinder, durch den immer ein-periodische Strukturen entstehen.

Die kubische Struktur des Minerals Sodalith (vgl. Abb. 11) in $\mathbb{E}^3$ ist ein gutes Beispiel für diesen Prozess. Man erhält sie als Projektion der sogenannten *246-Parkettierung [26] von $\mathbb{H}^2$ auf die Schwarz Primitivfläche.

Bemerkenswerterweise stellt eine Dekoration des Gyroids eine mögliche Erklärung für die Bildung der Keratin-Filamentstruktur in der Haut dar: Die Filamentpackung kann nämlich konstruiert werden durch eine symmetrische Packung von Linien in der hyperbolischen Ebene, die dann auf die Gyroidfläche projiziert wird [5, 6]. Abbildung 12 zeigt das entsprechende hyperbolische Muster (in schwarzen durchgezogenen Linien) auf der Poincaré-Scheibe[7]. Vermittels der Projektion auf die Gyroidfläche werden die Ränder der Kachelung zu einem Linienetzwerk in $\mathbb{E}^3$. Interpretiert man diese Linien weiterhin als zylindrische Röhren endlichen Durchmessers und erlaubt ihnen, unter Beibehaltung der Röhrendurchmesser und unter Vermeidung von Überschneidungen, ihre Länge zu minimieren, so relaxieren sie in die Struktur, die die Keratinfilamente in der Haut anzunehmen scheinen (bei der Relaxation verlassen die Linien ihre Pfade auf dem Gyroid und ‚wandern' ins Innere einer der beiden Domänen). Berücksichtigt man die Erkenntnisse des vorigen Abschnitts, dass gyroidförmige Membranen auch in biologischen Zellen vorkommen [1], so erscheint die Existenz von Gyroid-Membranen auch in lebenden Hautzellen möglich. Die soeben beschriebene geometrische Konstruktion würde dann, in Grundzügen, einem Polymerisationsprozess von Keratin in einer Gyroid-Membran entsprechen. Das Keratin benutzt die Gyroid-Membran als ein Gerüst für seine Polymerisation.

Es wird vermutet, dass ein ähnlicher Prozess auch bei der Bildung der Gyroid-Struktur im Schmetterling stattfindet, bei dem Chitin selektiv in einer der beiden von einer Gyroid-Membran bestimmten Domänen ansiedelt und sich verfestigt, d. h. polymerisiert. Diese Idee des *membrane templating* ist ein in biologischen Systemen

Abbildung 12. *(Links) Eine Parkettierung von $\mathbb{H}^2$ in unendlich große Kacheln, die durch unverzweigte Linien begrenzt werden. (Mitte) Projektion des $\mathbb{H}^2$-Musters auf eine Translationseinheitszelle der Gyroidfläche. (Rechts) Nach Entfernen der Gyroidfläche und Relaxation der Linien ensteht ein $\mathbb{E}^3$-Muster von verwobenen Linien, das den Filamenten in der Hautstruktur entspricht* [6].

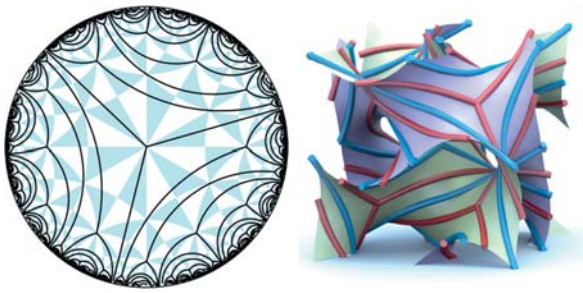


Abbildung 13. *Die symmetrische Parkettierung der Poincaré-Scheibe, deren Projektion auf den Gyroid auf die Struktur führt, die in Simulationen der Mischung sternförmiger Moleküle gefunden wurde* [19]. *Die roten und blauen Domänen entsprechen den innerhalb der Gyroid-Membran segregierten Komponenten A und B.*

weitverbreitetes Konzept. Was die Strukturbildung in der Haut gegenüber derjenigen in Schmetterlingen auszeichnet, ist die Bildung zusätzlicher Muster mit Symmetrien, die den Symmetrien in der hyperbolischen Ebene entsprechen.

Ein weiteres Beispiel für ein $\mathbb{H}^2$-Muster, das mittels des Gyroids in $\mathbb{E}^3$ übertragen wird, liefert ein Selbstorganisationsprozess sternförmiger Moleküle [19]. Das System, studiert mittels numerischer Simulation, ist eine Mischung aus zwei Typen ‚Y'-förmiger Polymere, bestehend aus entmischenden Komponenten (A-B-C oder A-B-D). Durch die wechselseitige Entmischung der Komponenten kommt es zu einem Phänomen der ‚Mikrophasenseparation', bei dem das System in einzelne Domänen (entsprechend den einzelnen Komponenten) segregiert; wegen der dreiarmigen Bindung der Moleküle ist eine makroskopische Phasenseparation nämlich nicht möglich. In dem System aus [19] bilden die Moleküle eine Struktur, bei der A und B eine Gyroid-Membran darstellen; die Komponenten C und D bilden dann jeweils eine der beiden labyrinthartigen Domänen. Da allerdings A und B auch zur Entmischung tendieren, bildet sich innerhalb der Membran ebenfalls ein segregiertes Muster, bestehend aus A- und B-Domänen, das auch hier als symmetrische Parkettierung von $\mathbb{H}^2$ interpretiert werden kann und das mit der Packung der Keratinfilamente in der Haut eng verwandt ist, siehe Abb. 13. Die beobachteten Muster gehören zu den topologisch komplexesten Strukturen, die in Simulationen weicher Materialien bisher beobachtet worden sind.

Die Keratinstruktur der Haut und das Muster in den Y-Sternpolymeren sind Beispiele dafür, dass chemische oder biologische Selbstanordnungsprozesse zu Mustern führen können, deren Symmetrien auf die Rolle der hyperbolischen Geometrie im Formationsprozess schließen lassen. Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, inwiefern die Abbildung $\mathbb{H}^2 \to \mathbb{E}^3$ vermittels der dreifach-periodischen Minimalflächen auch für die Enumeration neuer Strukturen nützlich ist, z. B. als Designmotive für künstliche mikro- oder nanostrukturierte Materialien, von künstlichen Knochen [18] bis hin zu photonischen Materialien [28].

Eine große Klasse von Parkettierungen (Tessellierungen), oder Packungen verzweigter baumartiger Objekte und Packungen von Linien können in $\mathbb{H}^2$ entworfen werden. Alle diese sind geeignet, auf die dreifach-periodischen Minimalflächen projiziert (oder *gedruckt*) zu werden. Dank umfangreicher Methoden, derartige Muster in der hyperbolischen Ebene zu enumerieren und zu erzeugen [5, 6, 25], lässt sich vermittels der Abbildung von $\mathbb{H}^2$ auf die Minimalflächen ein umfangreicher und systematischer Katalog symmetrischer Strukturen in $\mathbb{E}^3$ erzeugen, als Strukturmotive für neue oder bisher nicht identifizierte Strukturen. Von besonderer Bedeutung ist die Tatsache, dass die Abbildung unendlicher Muster in $\mathbb{H}^2$ auf die dreifach-periodischen Minimalflächen immer zu periodischen netzwerkartigen perkolierenden Strukturen in $\mathbb{E}^3$ führt (im Gegensatz zu einer Projektion auf eine Kugel, die immer zu Strukturen endlicher Ausdehnung führen würde). Derartige periodische Strukturen sind für die Materialwissenschaften und die Biologie von besonderer Bedeutung.

Parkettierungen von $\mathbb{H}^2$ aus Kacheln endlicher Größe (siehe Abb. 11), bei denen die Ränder der Kacheln ein

Abbildung 14. *Diese Parkettierung von $\mathbb{H}^2$ durch unendliche Kacheln, die durch mehrere verzweigte baumartige Strukturen begrenzt werden, erzeugt nach Projektion auf die Schwarz Primitivfläche eine hochsymmetrische Struktur bestehend aus acht ineinander verwundenen* ***srs****-(Gyroid-)Netzwerken* [5, 15]. *Derartige Strukturen sind potenziell sehr nützlich, z. B. als photonische Materialien* [28].

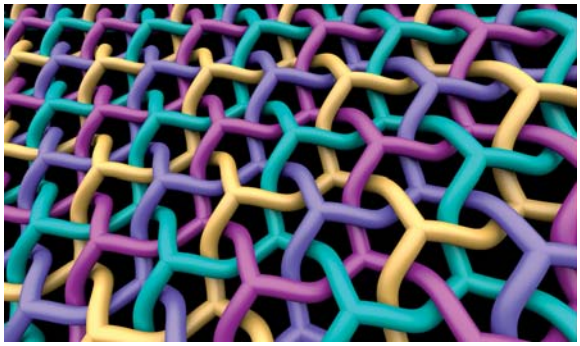


Abbildung 15. *Eine verwobene Struktur, die aus vier verwobenenen Honigwaben-Netzwerken besteht*

einzelnes Netzwerk (Graph) in $\mathbb{H}^2$ bilden, werden zu einzelnen Netzwerk-Strukturen in $\mathbb{E}^3$. Eine systematische Auflistung derartiger Strukturen stellt das Projekt EPINET dar [25].[8]

Parkettierungen von $\mathbb{H}^2$ durch Kacheln unendlicher Größe (d. h. jede Kachel berührt den Rand der Poincaré-Scheibe, siehe Abb. 15), bei denen die Grenzlinien zwischen den Kacheln baumartige Strukturen sind, führen zu komplizierteren Strukturen in $\mathbb{E}^3$. Jedes baumartige Objekt in $\mathbb{H}^2$ wird zu einem einzelnen Netzwerk (Graph). Je nachdem, ob sich die einzelnen Graphen in $\mathbb{E}^3$ berühren, ergibt sich eine Zahl verwachsener (oder ineinander verwundener) Netzwerke – in einigen Fällen mit bis zu 64 einzelnen Komponenten. Abb. 15 zeigt eine verwachsene Struktur bestehend aus vier verwobenen zweiperiodischen Honigwaben-Netzen.

Netzwerkstrukturen in $\mathbb{E}^3$, die aus einer kleinen Zahl ineinander verwobener Netzwerk-Komponenten bestehen, haben großes technologisches Potenzial. Insbesondere innerhalb der Gruppe der sogenannten *metal-organic frameworks* gibt es mehrere derartige Beispiele (Materialien, bei denen Metall-Atome durch kettenartige organische Moleküle verbunden sind). Diese oft sehr stabilen Strukturen haben nützliche Eigenschaften z. B. für die Speicherung von Wasserstoff, Methan, etc. [38]. Eine weitere Anwendung stellen photonische Materialien dar, bei denen Strukturen aus mehrfach verwobenen **srs**-Netzwerken, bemerkenswerte Eigenschaften bzgl. der Transmission von zirkular-polarisiertem Licht zeigen [27, 28].

Konfigurationen bestehend aus geodätischen Linien (Geraden) in $\mathbb{H}^2$ werden in $\mathbb{E}^3$ zu Filamentstrukturen, bestehend aus unendlich langen möglicherweise gekrümmten Filamenten. Derartig verwobene Strukturen sind bisher kaum erforscht und sind, wie das Beispiel der Hautstruktur zeigt, möglicherweise von großer Bedeutung in der Biologie und für synthetische Materialien. Die Charakterisierung und Analyse derartiger Strukturen steckt in den Kinderschuhen; die Erweiterung mathematischer Methoden auf diese komplizierteren Geometrien ist dringend erforderlich zur Charakterisierung von Zöpfen, Knoten und ähnlichem Gewirr (engl. *tangles*).

Die mögliche Relevanz der resultierenden Geometrien für verschiedene Disziplinen von der Biologie bis hin zur Materialwissenschaft macht die systematische Enumerierung hyperbolischer Parkettierungen und den daraus resultierenden Strukturen in $\mathbb{E}^3$ zu einer interdisziplinär wichtigen Aufgabe. Die Identifizierung und Taxonomie (Benennung) neuer Strukturen in experimentellen Daten wird durch die Verfügbarkeit systematisch enumerierter Strukturdatenbanken wie EPINET ermöglicht. Eine wichtige Aufgabe, bei der die Mathematik eine tragende Rolle spielt, ist dabei die geometrische Charakterisierung der strukturellen Eigenschaften: Topologie, Verbundenheit, kombinatorische Eigenschaften, Form, Morphologie, etc.

## Über die Rolle der hyperbolischen Geometrie für moderne Materialien

Wie wir gesehen haben, liefert die hyperbolische Geometrie einen Zugang zur Beschreibung der Filamentstruktur in menschlichen Hautzellen. Vermittels der kubischen dreifach-periodischen Gyroid-Minimalfläche wird eine symmetrische Packung von ein-dimensionalen Kurven in $\mathbb{H}^2$ in den Raum $\mathbb{E}^3$ abgebildet, in dem alle konkreten Materialien – biologisch oder synthetisch – existieren (müssen). Welche Aspekte des Problems werden durch diesen Zugang klarer oder zugänglicher, die bei der konventionellen kristallografischen Beschreibung in $\mathbb{E}^3$ ohne Referenz zu $\mathbb{H}^2$ verborgen bleiben? Zuvorderst gibt uns die Beschreibung mittels hyperbolischer Geometrie einen konzeptuellen Zugang zu netzwerkartigen Strukturen und eine Sprache, diese zu beschreiben, die den für die Bildung dieser Materialien physikalisch relevanten Prinzipien nahe stehen. Eine eher an konvexen Objekten orientierte mathematische Nomenklatur für netzwerkartige Strukturen ist – für im Durchschnitt negativ gekrümmte Grenzflächen – nicht optimal. Zweitens gibt uns die hyperbolische Geometrie einen Zugang zur systematischen Enumerierung räumlicher Strukturen in der Klasse der topologisch komplexen 3D-Netzwerkstrukturen, für die wir ansonsten keine gemeinsame wissenschaftliche Sprache haben.

Selbstverständlich sind nicht alle Fragen der Materialwissenschaften oder der Physik der weichen Materie geometrischer Natur. Wo allerdings Geometrie eine Rolle spielt, können geometrische Analysen Einsichten in die Bildung und die Eigenschaften komplexer Materialien liefern, die jenseits der spezifischen chemischen oder biologischen Details des betrachteten Systems Bestand haben. Die Wahl der dem System am besten angepassten Geometrie ist entscheidend dafür, dass die mathematischen Konzepte und Werkzeuge sowie die Sprache den dem System zugrundeliegenden Prinzipien entsprechen. Wenn das Material eine netzwerkartige Struktur hat, dann ist die ‚korrekte' Geometrie die hyperbolische

Geometrie sattelförmiger Grenzflächen mit komplexer Topologie.

Der materialgeometrische Zugang zu modernen Materialien ist eine Aufforderung an die Materialwissenschaften und den Forschungsbereich über Kondensierte Materie sich der hyperbolischen Geometrie zu öffnen, ebenso wie an die Mathematik, Inspiration aus den geometrischen Problemen der Materialwissenschaften zu ziehen. Während rigorose sattelfeste Theoreme zweifelsfrei ein hehres wichtiges Ziel der Mathematik sind, sollte bedacht werden, dass die Basis für eine interdisziplinäre Zusammenarbeit eine gemeinsame Sprache und Kommunikation ist. In dieser Hinsicht ist die Welt der *experimentellen Mathematik* ein wichtiger Treffpunkt, an dem Konzepte und Objekte der hyperbolischen Geometrie zu virtuellen computer-visualisierten Realitäten, zu aussagekräftigen Bildern oder – wie uns Alan Schoens Plastikmodelle lehrten – zu reellen Modellen werden.

*Danksagung.* Wir danken Karsten Grosse-Brauckmann und Alan Schoen für ausführliche Kommentare und Korrekturen zum Manuskript, und Michael Klatt für technische Hilfe. Viele der in diesem Artikel ausgedrückten Ansätze und Beispiele sind inspiriert durch Stephen Hyde, unseren gemeinsamen Doktorvater, der unsere Denkweise über Geometrie und Struktur in der Natur geprägt hat. Wir danken Stephen Hyde und Klaus Mecke für stetige Unterstützung und Ermunterung. Wir danken der DFG-Forschergruppe „Geometry and Physics of Spatial Random Systems“ (www.gpsrs.de) und der Humboldt Stiftung für Unterstützung.

## Anmerkungen

1. Dieser Ausdruck ist die Übersetzung des englischen Wortes *bicontinuous*, das zum Ausdruck bringt, dass die Domänen auf beiden Seiten der Fläche jeweils eine einzelne Zusammenhangskomponente darstellen (*continuous*).
2. Wie eng die Verwandtschaft, gegeben durch die unten diskutierte Bonnet-Transformation, zwischen diesen drei Flächen ist und dass der Gyroid somit tatsächlich eine Minimalfläche ist, erkannte Schoen durch Betrachtung von Coxeter-Karten nach einer Diskussion mit Blaine Lawson, siehe [30].
3. Eine Wortkombination aus den griechischen Wörtern *amphis* (beide) und *philia* (Freundschaft oder Liebe).
4. Wenn zusätzlich zu den Krümmungsvariationen auch die Variationen der Domänendicken berücksichtigt werden, stellt sich der Gyroid als im Vergleich zu Diamant- und Primitivflächen homogene Struktur heraus [32, 33].
5. Um Krümmungsvariationen zu studieren, müssen Bedingungen an die Längenskala (sogenannte Normierungen) gestellt werden (siehe [9, 33]). Die Optimalität des Gyroids ergibt sich für verschiedene physikalisch motivierte Normierungen (gleiches Volumen/Oberflächenverhältnis und gleiche durchschnittliche Gaußkrümmung). Zudem ist die Aussage lediglich durch den Vergleich mit einigen Klassen bekannter Minimalflächen entstanden. Eine mathematisch rigorose Aussage zur Frage der minimalen Krümmungsvariationen wäre nützlich.
6. Es liegt hier keine längentreue Immersion der hyperbolischen Ebene $H^2$ nach $E^3$ vor, insbesondere ist die Gaußkrümmung der Fläche nicht konstant. Tatsächlich ist eine längentreue Immersion von $H^2$ nach $E^3$ gemäß einem Satz von Hilbert unmöglich. Allerdings variiert die Längenverzerrung der Immersion nur wenig, und daher sind auch die Variationen der Gaußkrümmung klein. Insofern betrachten wir diese Flächen als einen bestmöglichen Versuch einer längentreuen Immersion von $H^2$ in $E^3$ und wollen sie in diesem Sinne als gute Immersion von $H^2$ bezeichnen.
7. Die Poincaré-Scheibe ist ein konformes Modell (Winkel auf der Scheibe entsprechen denjenigen in $\mathbb{H}^2$), das $\mathbb{H}^2$ darstellt als das Innere eines Kreises; der Rand des Kreises entspricht dabei $\infty$. Die Geodäten sind dabei Kreisbögen, die rechtwinklig auf dem Rand der Poincaré-Scheibe enden [2].
8. Die Datenbank von EPINET: www.epinet.anu.edu.au

## Literatur

[1] Z. A. Almsherqi, S. D. Kohlwein, and Y. Deng. Cubic membranes: A legend beyond the flatland of cell membrane organization. *J Cell Biol*, 173(6):839–844, 2006.

[2] H. S. M. Coxeter. *Non-Euclidean geometry*. University of Toronto Press, Toronto, 1947.

[3] L. de Campo, O. Delgado-Friedrichs, S. T. Hyde, and M. O'Keeffe. Minimal nets and minimal minimal surfaces. *Acta Crystallogr A*, 69:483–489, 2013.

[4] M. E. Evans and S. T. Hyde. From three-dimensional weavings to swollen corneocytes. *J R Soc Interface*, 8:1274–1280, 2011.

[5] M. E. Evans, V. Robins, and S. T. Hyde. Periodic entanglement I: Nets from hyperbolic reticulations. *Acta Crystallogr A*, 69(3):241–261, 2013.

**mathemas ordinate** ☞ **www.ordinate.de**

☎ 0431 23745-00/ ✉ -01 , info@ordinate.de ➜ Software for mathematical people !

☞ ***Mathematische Software u. Consulting*, MathType, Optica, ExtendSim, KaleidaGraph, Intel-Software, Fortran, NSBasic, @Risk, Chemistry, Satellitensteuerung u.a.** $\infty + \mu < \heartsuit$

$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \partial$

mathemas ordinate, Dipl. Math.Carsten Herrmann, M. Sc.
Königsbergerstr. 97, 24161 Altenholz

Fast 30 Jahre Erfahrung mit *Software*-Distribution !

[6] M. E. Evans, V. Robins, and S. T. Hyde. Periodic entanglement II: Weavings from hyperbolic line patterns. *Acta Crystallogr A*, 69(3):262–275, 2013.

[7] M. E. Evans and R. Roth. Shaping the skin: The interplay of mesoscale geometry and corneocyte swelling. *Phys Rev Lett*, 112(3):038102:1–5, 2014.

[8] A. Fogden and S. T. Hyde. Continuous transformations of cubic minimal surfaces. *Eur Phys J B*, 7:91–104, 1999.

[9] K. Grosse-Brauckmann. On Gyroid interfaces. *J Colloid Inter Sci*, 187:418–428, 1997.

[10] K. Grosse-Brauckmann and M. Wohlgemuth. The gyroid is embedded and has constant mean curvature companions. *Calc Var Partial Diff*, 4:499–523, 1996.

[11] D. Hilbert. Über Flächen von konstanter Krümmung. *Trans Amer Math Soc*, 2:87–99, 1901.

[12] S. Hyde. Boxing partula. *Forma*, 13(3):145–178, 1998.

[13] S. T. Hyde. Curvature and the global structure of interfaces in surfactant-water systems. In *Colloque de Physique C7-1990*, Supplément au Journal de Physique, pages 209–228, 1990.

[14] S. T. Hyde, S. Andersson, K. Larsson, Z. Blum, T. Landh, S. Lidin, and B. W. Ninham. *The language of shape: The role of curvature in condensed matter: Physics, chemistry and biology*. Elsevier Science B.V., 1997.

[15] S. T. Hyde and C. Oguey. From 2D hyperbolic forests to 3D Euclidean entangled thickets. *Eur Phys J B*, 16 (2000):613 – 630, 2000.

[16] S. T Hyde, M. O'Keeffe, and D. Proserpio. A short history of an elusive yet ubiquitous structure in chemistry, materials and mathematics. *Angew Chem Int Edit*, 47:7996–8000, 2008.

[17] J. N. Israelachvili, D. J. Mitchell, and B. W. Ninham. Theory of self-assembly of hydrocarbon amphiphiles into micelles and bilayers. *J Chem Soc Farad T 2*, 72:1525–1568, 1976.

[18] S. C. Kapfer, S. T. Hyde, K. Mecke, C. H. Arns, and G. E. Schröder-Turk. Minimal surface scaffold designs for tissue engineering. *Biomaterials*, 32:6875–6882, 2011.

[19] J. J. K. Kirkensgaard, M. E. Evans, L. de Campo, and S. T. Hyde. Hierarchical self-assembly of a striped gyroid formed by threaded chiral mesoscale networks. *P Natl Acad Sci USA*, 111(4):1271–1276, 2014.

[20] V. Luzzati and P.A. Spegt. Polymorphism of lipids. *Nature*, 215:701–704, 1967.

[21] K. Michielsen and D. G. Stavenga. Gyroid cuticular structures in butterfly wing scales: Biological photonic crystals. *J R Soc Interface*, 5:85–94, 2008.

[22] L. Norlén and A. Al-Amoudi. Stratum corneum keratin structure, function, and formation: The cubic rod-packing and membrane templating model. *J Invest Dermatol*, 123:715–732, 2004.

[23] M. O'Keeffe, M. A. Peskov, S. J. Ramsden, and O. Yaghi. The reticular chemistry structure resource (rcsr) database of, and symbols for, crystal nets. *Accts Chem Res*, 41:1782–1789, 2008.

[24] M. O'Keeffe, J. Plevert, Y. Teshima, Y. Watanabe, and T. Ogama. The invariant cubic rod (cylinder) packings: Symmetries and coordinates. *Acta Crystallogr A*, 57:110–111, 2001.

[25] S. J. Ramsden, V. Robins, and S. T. Hyde. Three-dimensional Euclidean nets from two-dimensional hyperbolic tilings: Kaleidoscopic examples. *Acta Crystallogr A*, 65(2):81–108, 2009.

[26] V. Robins, S. J. Ramsden, and S. T. Hyde. 2D hyperbolic groups induce three-periodic Euclidean reticulations. *Eur Phys J B*, 39:365 – 375, 2004.

[27] M. Saba, M. Thiel, M. D. Turner, S. T. Hyde, M. Gu, K. Grosse-Brauckmann, D. N. Neshev, K. Mecke, and G. E. Schröder-Turk. Circular dichroism in biological photonic crystals and cubic chiral nets. *Phys Rev Lett*, 106:103902, 2011.

[28] M. Saba, M. D. Turner, K. Mecke, M. Gu, and G. E. Schröder-Turk. Group theory of circular-polarization effects in chiral photonic crystals with four-fold rotation axes applied to the eight-fold intergrowth of gyroid nets. *Phys Rev B*, 88:245116, 2013.

[29] V. Saranathan, C. O. Osuji, S. G. J. Mochrie, H. Noh, S. Narayanan, A. Sandy, E. R. Dufresne, and R. O. Prum. Structure, function, and self-assembly of single network gyroid ($I4_132$) photonic crystals in butterfly wing scales. *Proc Natl Acad Sci USA*, 107(26):11676–11681, 2010.

[30] A. Schoen. Reflections concerning triply-periodic minimal surfaces. *Interface Focus*, 2:658–668, 2012.

[31] A. H. Schoen. Infinite periodic minimal surfaces without self-intersections. *NASA Technical Note*, TN D-5541, 1970.

[32] G. E. Schröder, S. J. Ramsden, A. G. Christy, and S. T. Hyde. Medial surfaces of hyperbolic structures. *Eur Phys J B*, 35:551–564, 2003.

[33] G. E. Schröder-Turk, A. Fogden, and S. T. Hyde. Bicontinuous geometries and molecular self-assembly: Comparison of local curvature and global packing variations in genus-three cubic, tetragonal and rhombohedral surfaces. *Eur Phys J B*, 54:509–524, 2006.

[34] G. E. Schröder-Turk, S. Wickham, H. Averdunk, F. Brink, J. D. Fitz Gerald, L. Poladian, M. C. J. Large, and S. T. Hyde. The chiral structure of porous chitin within the wing-scales of callophrys rubi. *J Struct Biol*, 174(2):290–295, 2011.

[35] H. A. Schwarz. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, volume 1. Julius Springer, Berlin, 1890.

[36] A. M. Seddon, J. Hallett, C. Beddoes, T. S. Plivelic, and A. M. Squires. Experimental confirmation of transformation pathways between inverse double diamond and gyroid cubic phases. *Langmuir*, 30(20):5705–5710, 2014.

[37] J. M. Seddon, A. M. Squires, C. E. Conn, O. Ces, A. J. Heron, X. Mulet, G. C. Shearman, and R. H. Templer. Pressure-jump x-ray studies of liquid crystal transitions in lipids. *Philos T Roy Soc A*, 364(1847):2635–2655, 2006.

[38] O. M Yaghi. Metal–organic frameworks: A tale of two entanglements. *Nat Mater*, 6:92–93, 2007.

Dr. Myfanwy Evans und PD Dr. Gerd Schröder-Turk,
Theoretische Physik I, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Staudtstraße 7B, 91058 Erlangen
myf.evans@fau.de
gerd.schroeder-turk@fau.de

Myfanwy Evans hat an der Australian National University Mathematik studiert und dort im Jahr 2011 mit einer Arbeit „Three-Dimensional Entanglement: Knots, Knits and Nets" über verflochtene Struktur in der weichen Materie promoviert. Seit 2011 arbeitet sie als Humboldt Fellow an der Universität Erlangen-Nürnberg im Institut für Theoretische Physik.

Gerd Schröder-Turk hat in Köln Physik mit Nebenfach Mathematik studiert. Nach einer Diplomarbeit im Jahr 2000 über die statistische Physik von Systemen mit eingefrorener Unordnung, hat er im Jahr 2005 an der Australian National University mit einer Arbeit „Skeletons in the Labyrinth" über geometrische Frustration in selbstorganisierten bikontinuierlichen Lipidsystemen promoviert. Seit 2006 arbeitet er an der Universität Erlangen, wo er über die Physik und Geometrie räumlich komplexer Systeme forscht und sich 2013 habilitiert hat.